КОМБИНАТОРНА ГЕОМЕТРИЈА
COMBINATORAL GEOMETRY

АУТОР

Петар Првуловић, VIII разред
ОШ "Вук Караџић", Смедеревска Паланка

МЕНТОР

Верица Станисављевић, проф. Математике
ОШ "Вук Караџић", Смедеревска Паланка

РЕЗИМЕ

Комбинаторна геометрија је занимљива област јер садржи нестандардне задатке које је тешко сврстати у један одређени део математике, али им је заједничко то што се односе на геометријске објекте и имају углавном комбинаторни карактер па њихово решавање подразумева добро познавање разних области као што су елементарн геометрија, комбинаторика, неједнакост па и неких нестандардних области као што јр Дирихлеов принцип.
Кључне речи: тачка, права, круг, прекривање

ABSTRACT

Combinatoral geometry is an interesting field because it contains non-standard assingments, which are hard to classify into a particular part of mathematics, but which have in common the fact that they relate on geometrical objects and have mostly a combinatoral character so their solving implies a good knowledge of miscellaneous fields like elementary geometry, combinatorics, non-equation and also some unusual like Dirichlet's concept.
Keywords: triangle, point, line, covering

1.Увод

Као релативно нова грана математике која се у задње време убрзано развија, комбинаторна геометрија је врло интересантна због специфичности својих проблема за чије је решавање потребно добро познавање разних области као што су комбинаторика и елементарна геометрија, и других нестандардних тема као што су Дирихлеов принцип. Све ово чини доследно разграничавање задатака ове области немогућим, па се то најчешће ради дељењем задатака на неколико области по садржини задатака или по њиховом начину решавања. Следећи ово могу се разлуковати три групе задатака: *задаци обојености, задаци прекривања* и *задаци распореда тачака и дужи*.

Горе је поменуто да је за решавање задатака из ове области потребно познавање разних области математике, како стандардних тако и нестандардних, између којих ће за решавање примера у овом раду највише бити коришћен Дирихлеов принцип (*Dirichlet,* 1805-1859) који се најједноставније може објаснити "принципом кутија" који гласи: ако у n кутија ставимо m кликера, тако да је $m>n$, онда ће у бар једној кутији бити више од једног кликера. Доказ самог принципа је једноставан па је узадацима овог типа најважније "препознати" кутије и кликере и, као што се може видети из наведених примера, применити Дирихлеов принцип на њих.

Пример 1. У одељењу има 34 ученика. Доказати да постоје бар два ученика чије презиме почиње истим словом.

Решење. Овде су "кутије" слова азбуке(има их 30), а "кликери" презимена ученика (има их 34). У најнеповољнијем случају за презимена првих 30 ученика биће "заузето" свих 30 слова, па презимена остала 4 ученика морају почињати са неким од већ "заузетих" слова, што значи да у одељењу постоје бар два ученика чија презимена почињу истим словом.

Пример 2. У продавницу је довезено 25 гајби са три различите сорте крушака (у свакој гајби су крушке исте сорте). Доказати да се у неких 9 гајби налазе крушке исте сорте.

Решење. Овде нам много не помаже Дирихлеов принцип у облику који смо формулисали на почетку, па ћемо зато применити уопштени Дирихлеов принцип који гласи: "Ако је у n кутија смештено бар $kn+1$ кликера, онда је у некој кутији смештено бар $k+1$ кликера" и који се лако доказује по аналогији са доказом "обичног" Дирихлеовог принципа. Дакле, ако би од сваке сорте крушака имали највише 8 гајби, онда би укупан број гајби био 24, при чему нам остаје нераспоређена једна гајба крушака, коју морамо ставити на неку од 3 гомиле, па ћемо добити гомилу од 9 гајби крушака исте сорте.

2. Задаци обојености

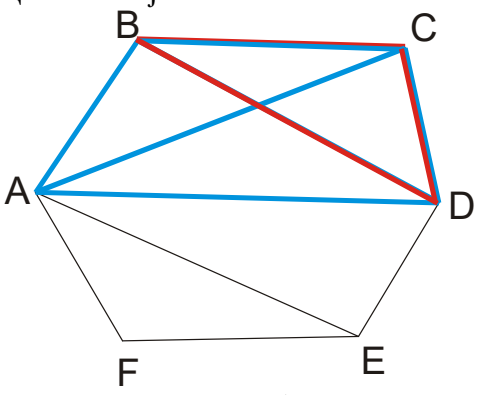
У овој групи задатака тачке, дужи или фигуре у равни обојене су са две или више боја и обично је проблем доказати да међу њима постоји одређен однос као што се може видети из наведених примера.

Пример 3. Бела раван је произвољно попрскана црвеном бојом. Доказати да у тој равни постоје две тачке обојене истом бојом чије је растојање 1.

Решење. У добијеној црвено-белој равни конструишемо једнакостраничан троугао странице 1. По Дирихлеовом принципу, бар два од три темена *A, B, C* су исте боје, па како је растојање између све три тачке 1, доказ је завршен.

Пример 4. Свака од страница и дијагонала конвексног шестоугла обојена је плавом или црвеном бојом. Доказати да се произвољнимбојењем увек може добити троугао чија су темена темена шестоугла и чије су све странице исте боје.

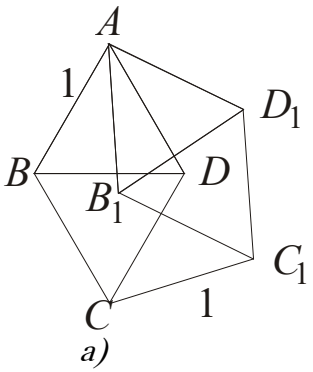
Решење. По Дирихлеовом принципу, бар три од пет дужи које полазе из једног темена исте су боје, рецимо плаве. Нека су *AB, AC* и *AD* плаво обојене дужи. Ако је *BC* плава, онда је троугао *BC* "плав", па је доказ завршен. Ако је *BC* црвена, онда *CD* може бити плава, па је троугао *ACD* "плав". Међутим, ако је и *CD* црвена, разликујемо следеће могућности: Ако је дуж *BD* плава, онда је троугао *ABD* "плав", а ако је дуж *BD* црвена, онда је троугао *BCD* "црвен", чиме је доказ завршен, а сличан доказ се изводи и у случају да из темена *A* полазе 3 црвене дужи.



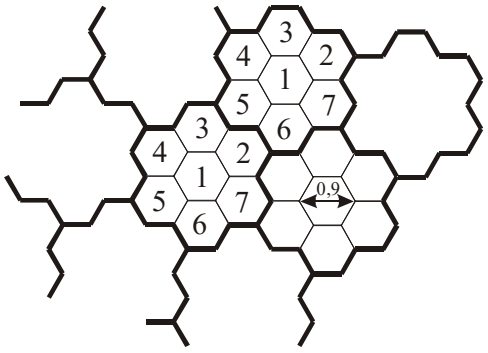
Слика 1

Пример 5. Који је најмањи број боја којим се могу обојити све тачке у равни, тако да било које две тачке раздаљине 1 буду различито обојене?

Решење. Очигледно је да је једна боја недовољна. Такође и две. Ни три боје не испуњавају услов. Доказ за овај случај знатно је сложенији него у претходном примеру. Претпоставимо да такво бојење постоји при чему су коришћене боје 1, 2 и 3. На фигури са слике 2.*а. ABD, BCD, AB*C_1 и $B_1C_1D_1$ су једнакостранични троуглови странице 1, и $CC_1 = 1$.



а)



б)

Слика 2

Како је $CC_1 = 1$, тачке *C* и C_1 су различито обојене, из чега следи да је бар једна од њих различито обојена од *A*. Нека то буде *C*, и нека је обојена бојом 1, а тачка *A* бојом 2. Због *BA=BC=DA=DC*=1 ниједна од тачака *B* и *D* није обојена неком од боја 1 и 2, па остаје да су обојене бојом 3, што се противи услову задатка јер је *BD*=1. Једно такво бојење може се извршити са седам боја као што је приказано на слици 2.*б*, на

којој су велике дијагонале шестоуглова нешто мање од 1. Али шта се може рећи за случајеве бојења са 4, 5 или 6 боја? За сада ништа. Испоставило се да је то тежак, још увек нерешен проблем. Године 1969. мађарски математичар Паул Ердеш поставио је хипотезу да се такво бојење може извести са 4 боје, али до сада ни он, ни било ко други није то доказао нити оповргао, па је тако наведени проблем бојења тачака у равни остао још један од мноштва нерешених проблема из ове области математике.

3. Задаци распореда тачака и правих

Задаци распореда тачака и правих дефинишу се по правилу на коначним скуповима тачака, односно правих или дужи, па дати скупови, или други који се од њих могу конструисати, имају најмањи и највећи елемент што је у појединим задацима веома значајно.

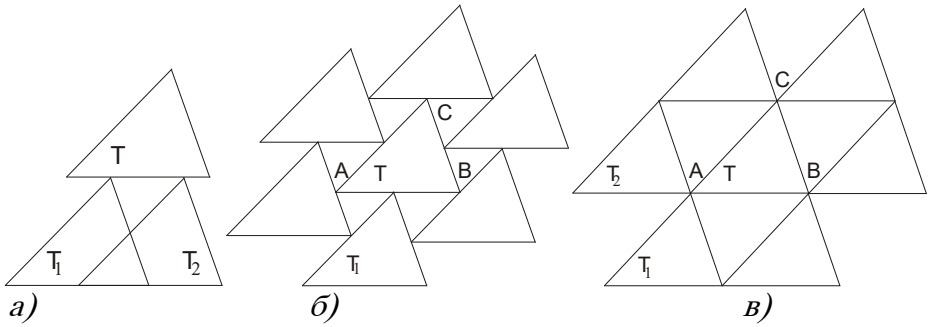
Пример 6. У равни је дато $2n$ тачака. Доказати да постоји права p која не садржи ниједу од датих тачака и која дели дату раван на две полуравни тако да се у свакој налази по n тачака.

Решење. Датих $2n$ тачака одређује највише $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ правих. Конструишимо праву p_0 која није паралелна ни са једном од уочених $n(2n-1)$ правих, и померајмо је транслаторно све док се са једне њене стране не нађе n тачака, што је сасвим изводљиво јер праве $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ садрже само по једну тачку датог скупа, а то следује из њихове паралелности са правом p_0. Нека је $p_n + 1$ права која пролази кроз тачку n+1. Тада између правих p_n и $p_n + 1$ увек може да се конструише права p паралелна са њима која дели дати скуп на два једнакобројна скупа.

Пример 7. Доказати да се у скупу дијагонала конвексног десетоугла могу одредити две које се секу под углом мањим од $6°$.

Решење. Десетоугао има $\frac{(10 \cdot 7)}{2} = 35$ дијагонала. Паралелно померимо све дијагонале десетоугла тако да се укрштају у произвољној тачки S у равни. Добијене праве деле пун угао код тачке S на 70 дисјунктних углова. Очигледно је да је један од њих мањи од $6°$, јер када би сви били већи од $6°$ њихов збир био би већи од $420°$, што је немогуће јер је њихов збир $360°$.

Пример 8. Који је највећи број троуглова, паралелних страница, које можемо примаћи паралелно троуглу T у равни, тако да се никоја два од датих троуглова не секу међусобно?



а) *б)* *в)*

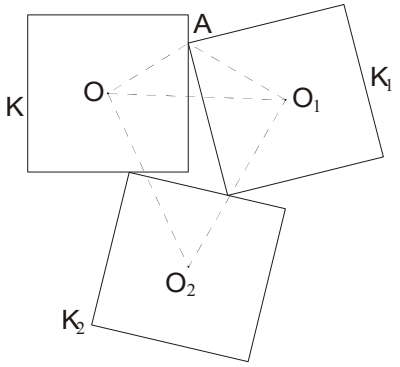
Слика 3

Решење. Јасно је да страницу AB троугла $T \equiv ABC$ у некој њеној унутрашњној тачки може да додирује само један троугао страница паралелних са T, јер би се два или више таквих троуглова засигурно пресекли (слика 3*а*). При томе је могуће да највише један такав троугао додирује T у темену A (и у темену B), али ако нема троугла T_1, онда теме A могу да додирују два таква троугла T_1 и T_2 не сечући се међусобно. Пошто ово правило важи за сваку страну троугла T, из њега проистиче да је број троуглова који додирују троугао T мањи или једнак од 6. Да он може бити 6 показано је на слици 3 *б-ц*.

Пример 9. Који је највећи број квадрата једнаких квадрату K, које можемо наслонити на дати квадрат K странице 1, тако да се међусобно не секу?

Решење. Нека је O центар датог квадрата K, а O_1 и O_2 центри квадрата K_1 и K_2 наслоњених на њега који се међусобно не секу (Слика 4*а*). Пошто је најмање растојање

од центра квадрата до његове границе једнако $\frac{1}{2}$, тада су одсечци OO_1, OO_2 и O_1O_2 већи од 1. Даље, пошто се квадрати K и K_1 додирују у некој тачки A, тада је $OO_1 \le OA + O_1A \le \sqrt{2}$ (док је највеће растојање од центра датог квадрата до његове границе једнако $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Даље, тачке O_1 и O_2 се налазе унутар прстена са центром O ограниченог кружницама полупречника 1 и $\sqrt{2}$, а пошто је $O_1O_2 \ge 1$, угао O_1OO_2 је већи од $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 41{,}4°$. Одатле произилази да квадрат K не може додиривати више од осам датих квадрата који се међусобно не секу, пошто је $9 \cdot 41{,}4 > 360°$. Као што се види на слици *4б* на дати квадрат K могуће је наслонити највише 8 њему једнаких квадрата.



а)

1	2	3
8	K	4
7	6	5

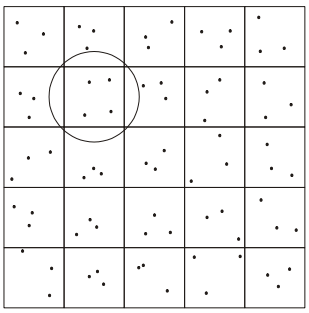
б)

Слика 4

4. Задаци прекривања

У овој групи задатака најчешће се тражи доказ да се неки скуп тачака, или неки његов део може прекрити фигуром одговарајућег облика коначних димензија, а то су најчешће кругови, троуглови а понекад и четвороуглови.

Пример 10. У квадрату странице 1 на произвољан начин распоређено је 76 тачака. Доказати да унутар квадрата постоје бар 4 тачке које се могу прекрити кругом полупречника $\frac{1}{7}$.

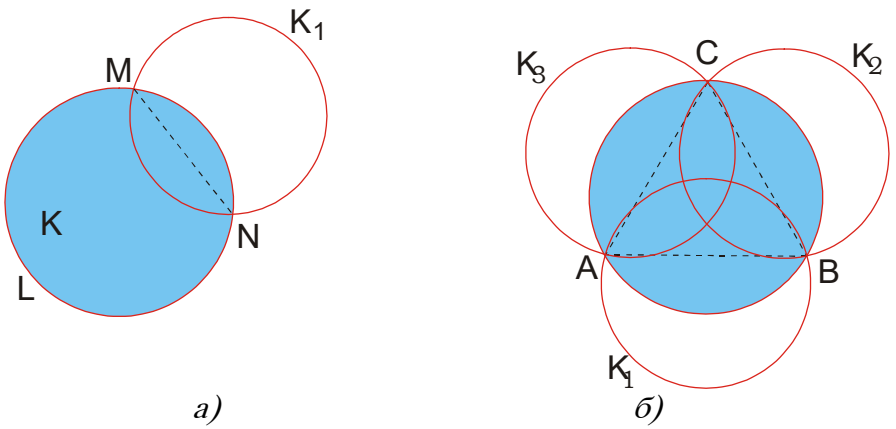


Слика 5

Решење. Поделимо дати квадрат на мање квадрате странице 0,2 којих укупно има $5\cdot 5 = 25$. Како је број тачака у квадрату 76, постоји бар један квадрат у коме се налазе најмање 4 тачке. Прекријмо уочени квадрат кругом полупречника $r = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. Како је $r^2 = \frac{1}{50}$, а то је мање од $\frac{1}{49} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$, круг описан око уоченог квадратића може се прекрити кругом који има исти центар и чији је полупречник $\frac{1}{7}$, чиме је доказ завршен.

Пример 11. Колики је најмањи могући број j кругова $K_1, K_2, \ldots$ мањих од датог круга K, којима се у потпуности може прекрити круг K?

Решење. Ако круг K покријемо мањим кругом K_1, покривени део кружнице k која ограничава круг K је мањи од њене половине(сл.6*а*), јер је MN мање од пречника круга K. Из истог разлога ни два мања круга K_1 и K_2 не могу у потпуности да прекрију дати круг K. Већ три таква круга испуњавају услов, као што се види са слике 6*б*. У овом случају AB, BC и CA представљају странице једнакостраничног троугла уписаног у круг K. Из овога се види да је најмањи могући број кругова који испуњавају дати услов $j = 3$.



а) *б)*

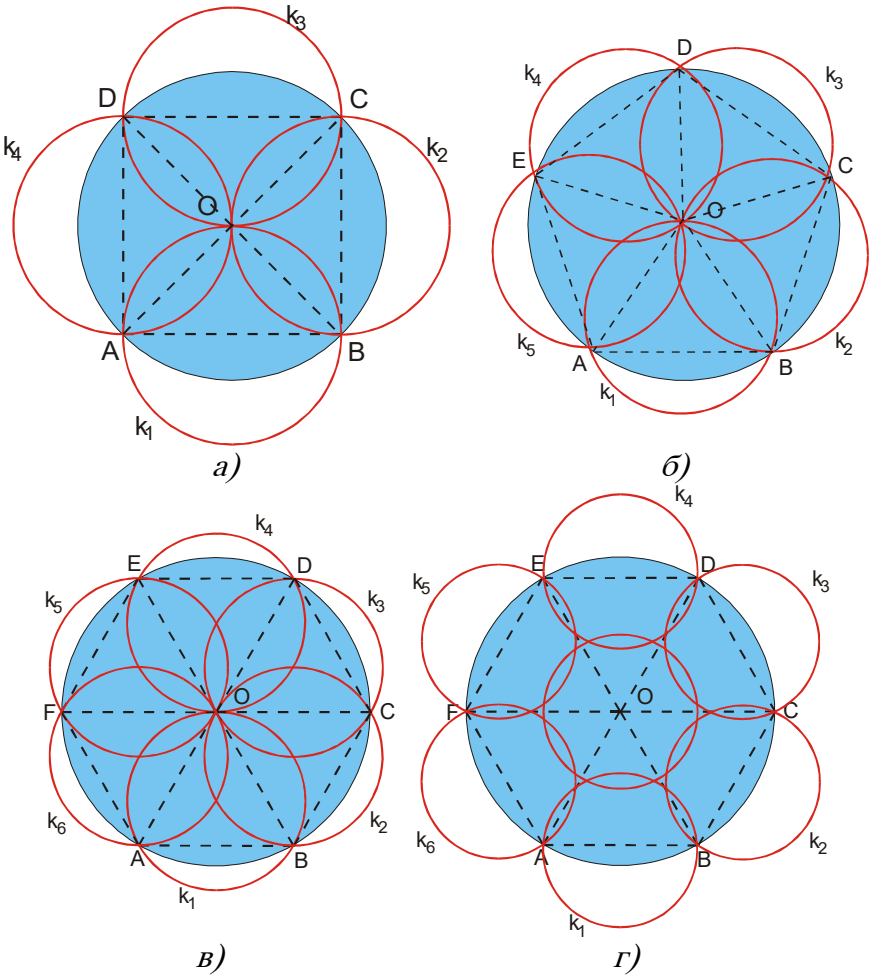
Слика 6

Пример 12. Чему је једнак најмањи број j кругова $K_1, K_2, \ldots Kj$ полупречника мањег или једнаког полупречнику круга K, којима се може у потпуности прекрити круг K полупречника r=1?

Решење. Пошто j зависи од r, означићемо га $j(r)$. Очигледно је да је $j(r)=1$, ако је r=1. Са друге стране $j(r)\geq 3$ за $r<1$. Даље из цртежа 6*б* види се да се дати круг K може покрити са 3 круга K_1, K_2, и K_3 полупречника $r=r^{(1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866...$(јер је страница једнакокраког троугла уписаног у круг K једнака $\sqrt{3}$). Није тешко показати да круг K није могуће покрити круговима полупречника мањег од $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Заиста, ако је полупречник круга K на слици 1а мањи од $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а полупречник круга K је 1, тада је $MN<\sqrt{3}$, $\cup MKN<120°$ и $\cup MLN>240°$, из чега следи да $\cup MLN$ кружнице круга K не може у потпуности да се покрије са два круга K_1 и K_2 полупречника $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Према томе је $j(r)=3$ за $1>r\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $j(r)>3$ за $r<\frac{\sqrt{3}}{2}$. Са слике 5а такође следи да се круг K може покрити са четири круга K_1, K_2, K_3 и K_4 полупречника $r=r^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707...$ (приметимо да је страница квадрата уписаног у дати круг K једнака $\sqrt{2}$). Међутим, са четири круга полупречника мањег од $r^{(2)}$ није могуће покрити круг K зато што $j(r)=4$ за $\frac{\sqrt{3}}{2}>r\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $j(r)>4$ за $r<\frac{\sqrt{2}}{2}$. Аналогно томе, на слици 5б-г представљена су "најекономичнија" покривања круга K са пет, шест и седам мањих кругова. Према томе, полупречници кругова представљених на цртежу *7б-г* који покривају круг K редом су: $r^{(r)}=\frac{1}{2}\sec 36°=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618...$, $r^{(4)}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0.588...$ и $r^{(5)}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Па је тако:

$$j(r)=\begin{cases} 1 \text{ за } r\geq 1 \\ 3 \text{ за } 1>r\geq r^{(1)}=0.866... \\ 4 \text{ за } r^{(1)}>r\geq r^{(2)}=0.707... \\ 5 \text{ за } r^{(2)}>r\geq r^{(3)}=0{,}618... \\ 6 \text{ за } r^{(3)}>r\geq r^{(4)}=0{,}588... \\ 7 \text{ за } r^{(4)}>r\geq r^{(5)}=0{,}5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



Слика 7

5. Други комбинаторно-геометријски задаци

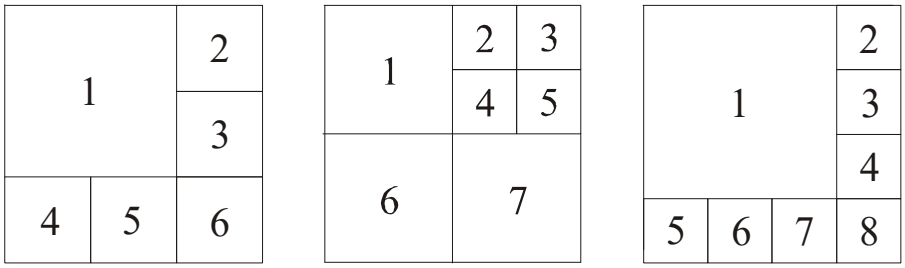
Пример 13. Унутар конвексног 2003-тоугла изабрано је 14 тачака, тако да од датих 2017 тачака (2003 темена и 14 тачака) никоје три нису колинеарне. Темена многоугла повезана су дужима са датим тачкама, а дате тачке су међусобно повезане. На колико је троуглова на тај начин подељен 2003-тоугао?

Решење. Одредимо збир углова свих добијених троуглова као суму унутрашњих углова многоугла и суму углова чија су темена у датим тачкама. Збир углова многоугла је $(2003-2)\cdot 180°$, а збир углова са теменом у датим тачкама је $14\cdot 360° = 28\cdot 180°$, па је њихов збир $2001\cdot 180° + 28\cdot 180° = 2029\cdot 180°$. Како је збир углова у троуглу $180°$, дати 2003-тоугао подељен је на 2029 троуглова.

Пример 14. У кругу полупречника 1 дато је 7 тачака, тако да је растојање било које две од њих не мање од 1. Доказати да је једна од датих тачака центар датог круга.

Решење. Ако се дати круг подели на 6 подударних кружних исечака, по Дирихлеовом принципу ће се унутар једног исечка наћи бар две тачке, што је, с обзиром на њихово растојање, могуће само ако је једна од њих центар круга.

Пример 15. Доказати да се дати квадрат увек може поделити на n (n>5) мањих квадрата који могу али не морају бити међусобно подударни.



а) *б)* *в)*

Слика 8

Решење. Када се дати квадрат средњим линијама подели на 4 подударна квадрата првобитни број квадрата увећа се за 3, јер се од 1 добије 4. ако један од добијених квадрата поделимо истим поступком на нова четири квадрата, новодобијени број квадрата ће се поново увећати за 3, што значи да ако имамо m квадрата увек можемо добити m+3 нова квадрата. Ако се поступак настави добићемо (m+3)+3=m+6 нових квадрата, па дати квадрат, као што се види са слике 8, увек можемо поделити на 6+3k=3l, 7+3k=3l+1 и 8+3k=3l+2 ($l \geq 2$) нових квадрата. Пошто се сваки природан број већи од 5 може написати у неком од облика 3k, 3k+1 і 3k+2 доказ је завршен.